2.2 Çözümlü Problemler

(1) (**a**) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}, \ n \in \mathbb{N};$

(**b**) $y_n = \ln(\sqrt{2n^2+1} - n) - \ln, \quad n \in \mathbb{N}$

dizilerininin sınırlı olduklarını gösteriniz.

Not: Sınırlı diziye verilen Tanım 1.13.15 e denk olan aşağıdaki tanımı da verebiliriz. $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ dir. •

Çözüm:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|(-1)^n n + 10| \leq |(-1)^n n| + 10 = n + 10$ ve $\sqrt{n^2+1} > n$ olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| = \frac{|(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \leq 11$$

bulunur. Dolayısıyla, (x_n) dizisi sınırlıdır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \ln n(\sqrt{2 + \tfrac{1}{n^2}} - 1) - \ln n = \ln(\sqrt{2 + \tfrac{1}{n^2}} - 1)$$

ve

$$0 < \sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2 + \tfrac{1}{n^2}} - 1 \leq \sqrt{3} - 1$$

olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\ln(\sqrt{2} - 1) \leq y_n \leq \ln(\sqrt{3} - 1)$$

bulunur.

Buna göre, (y_n) dizisi sınırsızdır. ⋄

Not: $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi sınırsızdır $\Leftrightarrow$ $\forall M > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyleki $|x_N| > M$ dir. •

(2) (**a**) $x_n = n^{\cos n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$; (**b**) $y_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$
dizilerinin sınırlı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm: (a) $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_{2k} = (2k)^{\cos 2k\pi} = 2k$ ve $x_{2k-1} = (2k-1)^{\cos(2k-1)\pi} = (2k-1)^{-1}$ bulunur. Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0 \Rightarrow (x_n)$ dizisi alttan sınırlıdır diyebiliriz. Öte yandan, her $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = [|\frac{M}{2}|] + 1$ doğal sayısı için $x_{2N} = (2N)^{\cos 2N\pi} = 2N > M \Rightarrow (x_n)$ üstten sınırsızdır.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n + 1} = \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \frac{1 - \big(\frac{2}{3}\big)^n}{1 + \frac{1}{2^n}} \geq \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{9}\Big(\frac{3}{2}\Big)^n \geq \frac{1}{3}$$

olduğundan, (y_n) dizisi alttan sınırlıdır. Herhangi $M > 0$ sayısı verildiğinde $N = [|\log_{\frac{3}{2}}\big(\frac{9M}{2}\big)|] + 1$ doğal sayısı için $y_N \geq \dfrac{2}{9}\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^N > M \Rightarrow$ (y_n) dizisi üstten sınırsızdır. ⋄

(3) (**a**) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$; (**b**) $y_n = \dfrac{100^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$
dizilerinin minimal ve maksimal terimlerini varsa bulunuz.

Çözüm: (a) $\forall n \geq 3$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})^2 < 1$$

olduğundan (x_n) $(n \geq 3)$ dizisi azalandır. O halde
$\max(x_n) = \max\{x_1, x_2, x_3\} = x_3 = \dfrac{9}{8}$ dir. Minimal eleman yoktur.

(b) $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{100}{n+1} \Rightarrow (y_n)$ $n > 99$ için dizi azalan, $1 \leq n \leq 99$ için de artandır. Dolayısı ile,

$$\max(y_n) = y_{100} = \frac{100^{100}}{100!} = \frac{100^{99}}{99!}$$

elde edilir. Minimal eleman yoktur.⋄

(4) **(a)** $x_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 1}$ $n \in \mathbb{N}$ dizisinin artan;

(b) $a > 0$ için y_1 herhangi pozitif bir sayı, $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_n + \dfrac{a}{y_n})$, $n \in \mathbb{N}$

olmak üzere (y_n) $(n \geq 2)$ dizisinin monoton azalan;
(c) $z_1 = 3, z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n^2 - 1,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (z_n) dizisinin artan olduklarını gösteriniz.

Çözüm: **(a)** $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$ ve $x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2+1}$ olduğu açıktır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow$ (x_n) dizisi artandır.
(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n > 0$ olduğu açıktır. $\forall n \geq 2$ için $y_n \geq \sqrt{a}$ olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $t \in (0, +\infty)$ için geçerli olan $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$ eşitsizliğinde $t = \dfrac{y_n}{\sqrt{a}} > 0$ olarak alırsak

$$\frac{y_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_n} \geq 2 \Rightarrow y_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\Big(\frac{y_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{y_n}\Big) \geq \sqrt{a}$$

olduğu anlaşılır. O halde, $\forall n \geq 2(n \in \mathbb{N})$ için

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{a}{y_n^2}\Big) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n$$

dolayısıyla, (y_n) $(n \geq 2)$ dizisi monoton azalandır.
(c) $n = 1$ için $z_1 = 3 \geq 3$ dür. Herhangi $n = k \geq 2$ sayısı için $z_k \geq 3$ olsun. $z_{k+1} \geq 3$ olduğunu görelim.

$$z_{k+1} - 3 = \frac{1}{2}z_k^2 - 4 = \frac{1}{2}(z_k^2 - 8) = \frac{1}{2}(z_k - 2\sqrt{2})(z_k + 2\sqrt{2}) > 0$$

ve buradan $z_{k+1} \geq 3$ olduğu anlaşılır. O halde, Matematik indüksiyon yöntemi gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n \geq 3$ dür. $z_1 = 3, z_2 = \frac{1}{2}3^2 - 1 = 3,5 \Rightarrow z_2 - z_1 = 0,5 > 0$ dır. Herhangi $n = k \geq 2$ sayısı için $z_{k+1} - z_k > 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} 2z_{k+1} = z_k^2 - 2,\ 2z_{k+2} = z_{k+1}^2 - 2 \Rightarrow 2(z_{k+2} - z_{k+1}) \\ = z_{k+1}^2 - z_k^2 = (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k) > 0 \Rightarrow z_{k+2} - z_{k+1} > 0 \end{aligned}$$

ise (Matematik indüksiyon yöntemi gereğince) (z_n) dizisi artandır. $\diamond$

(5) Limitin tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-3n^2}{n^3+1} = 5$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+7.6^n}{3^n+6^n} = 7$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n 2 = 0$.

Çözüm: Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin.

(a)

$$\begin{aligned}\left|\frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}-5\right| &= \frac{|-3n^2-5|}{n^3+1} = \frac{3n^2+5}{n^3+1} \\ &= \frac{3+\frac{5}{n^2}}{n+\frac{1}{n^2}} < \frac{3+5}{n} = \frac{8}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{8}{\epsilon}\end{aligned}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [\![\frac{8}{\epsilon}]\!]$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon \geq 8$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\left|\frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}-5\right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-3n^2}{n^2+1} = 5$$

bulunur.

(b)

$$\begin{aligned}\left|\frac{2^n+7.6^n}{3^n+6^n}-7\right| &= \frac{|2^n-7.3^n|}{3^n+6^n} = \frac{7-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+2^n} \\ &< \frac{7}{2^n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{7}{\epsilon}\end{aligned}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|\log_2 \frac{7}{3}|]$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon \geq 7$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\left|\frac{2^n+7.6^n}{3^n+6^n}-7\right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+7.6^n}{3^n+6^n} = 7$$

bulunur.

(c)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}-0\right| &= \frac{\sqrt[3]{n^2}|\sin n^2|}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} < \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon^3}\end{aligned}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|\frac{1}{\epsilon^3}|]$ ($n_\epsilon = 0, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$$

bulunur.

(d) $\forall n > 2 (n \in \mathbb{N}$ için)

$$|\log_n 2 - 0| = |\log_n 2| = \frac{1}{\log_2 n} < \epsilon \Leftrightarrow n > 2^{\frac{1}{\epsilon}}$$

olur. O halde, $n_\epsilon = [|2^{\frac{1}{\epsilon}}|]$ ($n_\epsilon = 1, \epsilon > 1$ ise) olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için

$$|\log_n 2| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log_n 2 = 0$$

bulunur. $\diamond$

(6) $x_n = (0,5)^{((-1)^n-1)n}, n \in \mathbb{N}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Herhangi $a \neq 1$ sayısı (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $\epsilon = \frac{|a-1|}{2} > 0$ olmak üzere (x_n) dizisinin $x_{2k-1} = 2^{2(2k-1)} > 1 + \frac{|a-1|}{2}$ olacak şekilde sonsuz sayıda terimleri $a \neq 1$ noktasının $U_\epsilon(a)$ komşuluğu dışında bulunmaktadır. $a = 1$ noktası da (x_n) dizisinin bir limiti olamaz. Çünkü, $a = 1$ noktasının, örneğin, $U_{\frac{1}{2}}(1)$ komşuluğu dışında (x_n) dizisinin sonsuz çoklukta terimleri (tek indisli terimleri) bulunmaktadır. Böylece, Tanım 2.1.2(b) gereğince (x_n) dizisi ıraksaktır. $\diamond$

(7) Teorem 2.1.9 u ispatlayınız.

Çözüm: **(a)** $\mathbb{R}$ içinde (x_n) yakınsak dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ ve $a \neq b$ olsun. $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$ alalım. Tanım 2.1.1. gereğince $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a)$ olur. $\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n''_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a)$ bulunur. O halde, $n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ olmak üzere $\forall n > n_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a)$ ve $x_n \in U_\epsilon(b) \Rightarrow$

$\forall n > n_\epsilon$ için $x_n \in U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b)$ olur. $U_\epsilon(a) \cap U_\epsilon(b) = \emptyset$ olduğundan bu mümkün değildir. Elde edilen çelişki $a = b$ olduğunu gösterir.

(b) (x_n) yakınsak bir dizi olsun. Limit tanımında $\epsilon = 1 > 0$ alırsak $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_1$ için $|x_n - a| < 1$ veya $|x_n| < |a| + 1$ olur. $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1}|, |a| + 1\} > 0$ sayısı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ dir. Dolayısıyla, (x_n) dizisinin sınırlı olduğu anlaşılır.

(c) $\lim_{n\to\infty} z_n = d$ ve $d \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} z_n = d$ ise $\epsilon = \dfrac{|d|}{2} > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n > n_\epsilon$ için $|z_n - d| < \epsilon$ dir. O halde, $\forall n > n_\epsilon$için $|z_n| = |d + z_n - d| \geq |d| - |z_n - d| > |d| - \epsilon = \dfrac{|d|}{2}$ olur. Dolayısıyla, $\forall n > n_\epsilon$ için $|z_n| > \dfrac{|d|}{2}$ dir.

(d) Önermeyi (x_n/y_n) dizisi için ispatlayalım. (c) ye göre $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ ise $\exists n_b \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_b$ için $|y_n| > \dfrac{|b|}{2}$ dir. Herhangi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Tanım 2.1.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ise $\exists n_\epsilon^{'} \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ için $|x_n - a| < \dfrac{\epsilon|b|}{4}$ dir. $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ ise $\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n''_\epsilon$ için $|y_n - b| < \dfrac{\epsilon|b|^2}{4(|a| + |b|)}$ dir. $n_\epsilon = \max\{n_b, n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ olsun. O halde, $\forall n > n_\epsilon$ için

$$\begin{aligned} |\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}| &= |\frac{bx_n - ay_n}{y_n b}| \leq \frac{1}{|y_n|}(|x_n - a| + \frac{|a|}{|b|}|y_n - b|) \\ &< \frac{2}{|b|}\frac{\epsilon|b|}{4} + \frac{2|a|}{|b|^2}\frac{\epsilon|b|^2}{4(|a| + |b|)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu da $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ olması demektir.

(e) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ve $a < b$ olsun. Herhangi $c \in (a, b)$ sayısını gözönüne alalım. Tanım 2.1.1 gereğince $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ için $|a_n - a| < c - a$ veya $-c + 2a < a_n < c$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise $\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n''_\epsilon$ için $|b_n - b| < b - c$ veya $c < b_n < 2b - c$ bulunur. $n_0 = \max\{n', n''\}$ olsun. O halde, $\forall n > n_0$ için $a_n < c < b_n$ olur.

(f) Gerçekten, eğer, $a > b$ ise (e) ye göre $\forall n > n_0$ için $a_n > b_n$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ise, $\forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ için $|x_n - a| < \epsilon$ dir. Öte yandan, her $x, y \in \mathbb{R}$ sayıları için $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ eşitsizliği doğru olduğundan, $\forall n > n_\epsilon$ için $\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a| < \epsilon$ bulunur. Buradan, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ elde edilir. $\diamond$

(8) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - n - n^3}{(3n + 1)^3}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n + n!}{2^n + (n + 1)!}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n + 1}{3n - 5})^3$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n^3}{n^2 + 3} - \dfrac{2n^2}{2n + 1})$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n - 1}{n^2})$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}|$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}{n^2 + 1} - \dfrac{2n + 1}{n^2})$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}})$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)})$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n - 1}{2^n})$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{2}.\sqrt[4]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2}\big)$.

Çözüm: **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})}{n - \sqrt{n}} == \lim\limits_{n\to\infty} (n + \sqrt{n}) = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 3} - n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n - \sqrt{4n^2 - 1})(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3} + n}{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(\sqrt{n^2 + 3} + n)(2n + \sqrt{4n^2 - 1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{3(2+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}})} = \frac{1+1}{3(2+\sqrt{4})} = \frac{1}{6}\ .$$

(c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1-n-n^3}{(3n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^2}-1}{(3+\frac{1}{n})^3} = -\frac{1}{27}\ .$

(d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}(1+\frac{10^n}{n!})}{1+\frac{1}{n+1}\frac{2^n}{n!}} = 0\ .$

(e) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2n+1}{3n-5}\Big)^3 = \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1}\Big)^3 = \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}\Big)^3 = \Big(\frac{2}{3}\Big)^3\ .$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^3}{n^2+3}-\frac{2n^2}{2n+1}\Big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-6n^2}{(2n+1)(n^2+3)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{6}{n}}{(2+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^2})} = \frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

(g) $\displaystyle 1+2+\ldots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\Big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(h) $\displaystyle x_n = \frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n} = \frac{1-2+3-\ldots+(-1)^{n-1}n}{n}$ olsun. O halde, $n=2k$ ise,

$$x_{2k} = \frac{(1-2)+(3-4)+\ldots+(2k-1-2k)}{2k} = \frac{-k}{2k} = \frac{-1}{2}$$

olur. Eğer, $n=2k-1$ ise,

$$\begin{aligned}x_{2k+1} &= \frac{(1-2)+(3-4)+\ldots+[(2k-3)-(2k-2)]+(2k-1)}{2k-1}\\ &= \frac{(k-1)+(2k-1)}{2k-1}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right| = |x_n| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=2k \text{ ise}, \\ \frac{k}{2k-1}, & n=2k-1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu bulunur. $\mathbb{R}$ içindeki herhangi (a_n) dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_n = a$$

önermesi doğru olduğundan (ispatlayınız)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x_n| = \lim_{n\to\infty}|x_{2k}| = \lim_{n\to\infty}|x_{2k-1}| = \frac{1}{2}$$

bulunur.

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n^2}-\frac{2n+1}{n^2+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}-\frac{2n+1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-2n^3-n^2-2n-1}{n^2(n^2+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1\end{aligned}$$

bulunur.

(j) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall k\in\{1,2,\ldots,n\}$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

eşitsizliği doğru olduğundan,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le x_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

bulunur. Buradan da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ olması nedeniyle Teorem 2.1.9 un (f) şıkkı gereğince $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ olur.

(k)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\big[(1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})\big] \\
&\qquad\qquad \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1})
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

(l) $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
x_n - \frac{1}{2}x_n &= \frac{1}{2} + (\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}) + (\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}) + \ldots + (\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$x_n = 1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}) - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} - 2\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 3
\end{aligned}$$

bulunur.

(m) $\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \dfrac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}}$ ve $\forall n > 2$

için

$$\begin{aligned}
2 &= (2^{\frac{1}{2^n}})^{2^n} = (1 + (2^{\frac{1}{2^n}} -))^{2^n} > (1 + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1))^n \\
&= 1 + n(2^{\frac{1}{2^n}} - 1) + \ldots + (2^{\frac{1}{2^n}} - 1) > n(2^{\frac{1}{2^n}} - 1) \Rightarrow \\
&0 < 2^{\frac{1}{2^n}} - 1 < \frac{2}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = 1 \Rightarrow \\
&\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2)^{\frac{1}{2^n}}} = 2
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(9) Toerem 2.1.21 i ispatlayınız.

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \forall n > n_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $|\alpha_n| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dir. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|\alpha_n| < \epsilon \Rightarrow \forall n > n_\epsilon$ $(n_\epsilon \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$ dır. $\diamond$

(10) Aşağıdaki Teiblitz teoremini ispatlayınız.
Eğer,

(a) $P_{nk} \geq 0$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$;

(c) Her sabit k için $\lim_{n\to\infty} P_{nk} = 0$;

(d) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

koşulları sağlanırsa, $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (t_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} t_n = a$ dır.

Çözüm: (d) koşulundan $\exists N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq N$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ olur. (x_n) dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| \leq M, \qquad |x_n - a| \leq 2M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.
(c) koşulundan ise, $\exists n'_\epsilon > N (n'_\epsilon \in \mathbb{N})$ öyle ki $\forall n > n'_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için

$$P_{nk} < \frac{\epsilon}{4NM}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

olur. O halde, (a) ve (b) koşulları kullanıldığında her $n > n'_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - a\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{nk}a\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x_k - a)\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - a| = P_{n1}|x_1 - a| + \ldots + P_{nN}|x_N - a| + \\
&+ P_{nN+1}|x_{N+1} - a| + \ldots + P_{nn}|x_n - a| \\
&\leq N\frac{\epsilon}{4NM}2M + \frac{\epsilon}{2}(P_{nN+1} + \ldots + P_{nn}) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısı ile,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k = a$$

dir. $\diamond$

(11) Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) (x_n) yakınsak bir dizi ise,

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere (ξ_n) dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ dir.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n > 0$ olmak üzere (y_n) yakınsak bir dizi ise,

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n}} \quad n \in \mathbb{N}$$

olmak üzere (γ_n) dizisi de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ dir.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = +\infty$ dir.

Çözüm: **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $P_{nk} = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n)$ dersek, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{kn} x_k = \xi_k$ olur. P_{nk} ve (x_n) için problem 10 un tüm koşulları sağladığından,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} t_n = a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ olsun.

$$P_{nk} = \frac{\frac{1}{y_k}}{\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n}} \quad (n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n),\ x_n = y_n$$

dersek $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{kn} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{kn} y_k = \gamma_n$ olur. O halde, problem 10 un tüm koşulları sağladığından

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} t_n == \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

olur. olur.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\gamma_n} = 0$ olduğunu görelim. $P_{nk} = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n)$, $x_n = \dfrac{1}{y_n}$ dersek $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{kn} x_k = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{y_1} + \ldots + \dfrac{1}{y_n}) = \dfrac{1}{\gamma_n}$ olur. O zaman, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\gamma_n} = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = 0$ bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$$

dur. $\diamond$

(12) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olmak üzere (x_n) yakınsak bir dizi ise,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \xi_n$$

eşitsizliği doğru ve $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ olduğundan, Teorem 2.1.9 (f) gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

dir. $\diamond$

(13) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = a$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Problem 12 den

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \tfrac{x_2}{x_1} \tfrac{x_3}{x_2} \cdots \tfrac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

bulunur. $\diamond$

(14) Teorem 2.1.30 u ispatlayınız.

Çözüm: l sonlu bir sayı olsun. $x_0 = y_0 = 0$ ve $P_{nk} = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{y_k}$ $(n \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \ldots, n)$, $X_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ dersek, P_{nk} ve X_n Problem 10 un tüm koşullarını sağlamaktadır. Ayrıca, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} X_k = \dfrac{x_n}{y_n}$ dir. Demek ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ olur.$\diamond$

(15) $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşeitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} = \dfrac{1}{p+1}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\big) = \dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

Çözüm: Stolz teoreminden faydalanarak (c) nin doğruluğunu gösterelim. (a) ve (b) nin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.

$x_n = 1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p$ ve $y_n = n^{p+1}$ olarak alırsak her $n > 2$ ($n \in \mathbb{N}$) için

$$\begin{aligned}
\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \frac{(2n+1)^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \\
&= \frac{2^p n^p (1 + \frac{1}{2n})^p}{n^{p+1} - [n^{p+1} - (p+1)n^p + \frac{(p+1)p}{2} n^{p-1} - \ldots + (-1)^{p+1}]} \\
&= \frac{2^p (1 + \frac{1}{2n})^p}{(p+1) - \frac{(p+1)p}{2}\frac{1}{n} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{n^p}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^p (1 + \frac{1}{2n})^p}{(p+1) - \frac{(p+1)p}{2}\frac{1}{n} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{n^p}} \\
&= \frac{2^p}{p+1}
\end{aligned}$$

bulunur. $\diamond$

(16) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 + \dfrac{1}{n})$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

eşitsizliği doğru olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} < x_n$ olur. Demek ki, (x_n) dizisi azalandır. Şimdi dizinin alttan sınırlı olduğunu gösterelim. (2.2) den dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln(1+1) + \ln(1+\tfrac{1}{2}) + \ldots + \ln(1+\tfrac{1}{n}) - \ln n \\ &= \ln(2.\tfrac{3}{2}.\tfrac{4}{3}\ldots\tfrac{n+1}{n}\tfrac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise, (x_n) dizisinin alttan sınırlı olması demektir. O halde, Teorem 1.13.20 gereğince (x_n) yakınsaktır. Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ dersek Teorem 2.1.21 gereğince (α_n) sonsuz küçük bir dizi olmak üzere

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = c + \alpha_n$$

veya $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olmak üzere

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = c + \ln n + \alpha_n \tag{2.3}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada ki $c = 0,577216\ldots$ sayısı Euler sabiti olarak isimlendirilir. ⋄

(17) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n})$ hesaplayınız.

Çözüm: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde, (2.3) kullanıldığında

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} &= x_{2n} - x_n = \ln 2n + \alpha_{2n} - \ln n - \alpha_n \\ &= \ln 2 + (\alpha_{2n} - \alpha_n) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}) = \ln 2$ elde edilir. ⋄

(18) Monoton dizilerin limiti üzerine teoremleri kullanarak terimleri aşağıda verilen dizilerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \ldots + \frac{n}{4^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N};$

(b) $x_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N};$

(c) $x_n = \big(1 + \frac{1}{1^2+1}\big)\big(1 + \frac{1}{2^2+1}\big) \ldots \big(1 + \frac{1}{n^2+1}\big), \quad n \in \mathbb{N}.$

Çözüm: (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x_n + \frac{n+1}{4^n} > x_n$ olduğundan (x_n) artan bir dizidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \geq n$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{2.2}{2^2.2} + \frac{3.2}{2^3.2^2} + \ldots + \frac{2n}{2^n.2^{n-1}} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \end{aligned}$$

olur. Demek ki, (x_n) artan ve üstten sınırlı bir dizidir. O halde, (x_n) yakınsaktır.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)^2+1} > x_n$$

olduğundan, (x_n) artan bir dizidir. Her $n > 2$ $(n \in \mathbb{N})$ için $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ doğru olduğundan,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, (x_n) artan ve üstten sınırlı bir dizidir. O halde, (x_n) yakınsaktır.

(c) Bu şıktaki (x_n) dizisinin yakınsaklığı benzer şekilde gösterilebilir.$\diamond$

(19) $x_n = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k(2k+1)} - \dfrac{1}{2(n+1)},\ n \in \mathbb{N}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{-1}{2(n+1)(2n+3)} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, (x_n) artan bir dizidir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 1$ dir. (x_n) artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır. $\diamond$

(20) $a > 0,\ b > 0$ ve $x_1 = a,\ x_{n+1} = a + \dfrac{bx_n}{ax_n + b},\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n) dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olduğu açıktır.

$$x_2 - x_1 = a + \frac{bx_1}{x_1 + b} - x_1 = \frac{ab}{a^2 + b} > 0$$

yani $x_2 > x_1$ dir. Herhangi $n = k$ $(k \geq 2,\ k \in \mathbb{N})$ için $x_{k+1} > x_k$ olduğunu kabul edip $x_{k+2} > x_{k+1}$ olduğunu gösterelim.

$$x_{k+2} = a + \frac{bx_{k+1}}{ax_{k+1} + b} = a + \frac{b}{a + \frac{b}{x_{k+1}}} > a + \frac{b}{a + \frac{b}{x_k}} = x_{k+1}$$

dir. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = a + \frac{bx_n}{ax_n + b} < a + \frac{b}{c}, \quad n \in \mathbb{N}$$

olduğundan, (x_n) dizisi üstten sınırlıdır. Demek ki, (x_n) dizisi yakınsaktır. $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = t$ diyelim.

$$x_{n+1} = a + \frac{bx_n}{ax_n + b} \quad n \in \mathbb{N}$$

bağıntısında $n \to \infty$ iken limite geçilirse, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = t$ olması nedeniyle

$$t = a + \frac{bt}{at+b} \Rightarrow t^2 - at - b = 0 \Rightarrow$$
$$t_1 = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2} \text{ ve } t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

bulunur. (x_n) pozitif terimli bir dizi olduğundan, $t = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$ olur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

dir. $\diamond$

(21) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin birer Cauchy dizisi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$;

(b) $x_n = \frac{2n+1}{5n-2},\ n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_n = 0,\underbrace{55\ldots5}_{n-tane},\ n \in \mathbb{N}$;

(d) $|q| < 1$ olmak üzere $x_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$;

(e) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}/n!,\ n \in \mathbb{N}$.

Çözüm: **(a)** Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$|x_{n+p} - x_n| = |\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}| = |-\frac{p}{n(n+p)}| = \frac{p}{n(n+p)} < \frac{1}{n}$$

olduğundan, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [|\frac{1}{\epsilon}|] \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ olacaktır. Buna göre, (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(b) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |\frac{2(n+p)+1}{5(n+p)-2} - \frac{2n+1}{5n-2}| \\
&= |\frac{-9p}{(5n-2)(5(n+p)-2)}| = |\frac{9}{5}(\frac{1}{5(n+p)-2} - \frac{1}{5n-2})| \\
&= \frac{9}{5}(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5(n+p)-2}) < \frac{9}{5(5n-2)}
\end{aligned}$$

olur. Buradan, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [\![\frac{10\epsilon + 9}{25\epsilon}]\!] \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ elde edilir. Buna göre, (x_n) bir Cauchy dizisidir.

(c) $x_n = 0,\underbrace{55\ldots5}_{n-tane} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \ldots + \frac{5}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ olduğundan, her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
x_{n+p} - x_n &= \frac{5}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{5}{10^{n+p}} \\
&= \frac{5}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{p-1}}\right) \\
&= \frac{5}{10^{n+1}} . \frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{5}{9.10^n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [\![\log \frac{5}{9\epsilon}]\!]$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir.

(d) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |aq^n + aq^{n+1} + \ldots + aq^{n+p-1}| \\
&\leq |a||q|^p(1 + |q| + \ldots + |q|^{p-1}) \\
&= |a||q|^n \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|} < \frac{|a||q|^n}{1 - |q|}
\end{aligned}$$

olduğundan, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [\![\ln \frac{\epsilon(1 - |q|)}{|a|} / \ln |q|]\!]$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir.

(e) $x_n = 1 + \frac{(-1)^{2-1}}{2!} + \frac{(-1)^{3-1}}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n! > 2^{n-1}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |\frac{(-1)^{n+1-1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)!}| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \\
&< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}) \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon = [|\ln \frac{1}{\epsilon}|] + 1$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ bir Cauchy dizisidir. $\diamond$

Not: Cuachy yakınsaklık kriteri gereğince (Bkz. Teorem 2.1.35 (c))her bir Cauchy dizisi yakınsak olduğundan Problem 20 de verilen dizilerin her biri yakınsaktır. $\bullet$

(22) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin birer Cauchy dizisi olmadıklarını, dolayısi ile, ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 0,2^{(-1)^n n}$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $x_n = \frac{n \cos \pi n - 1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$; (d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n \in \mathbb{N}$;

(e) $x_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, $n \in \mathbb{N}$; (f) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Çözüm: **(a)** Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|x_{2(2k-1)} - x_{2k-1}| &= |0,2^{2(2k-1)} - 0,2^{-(2k-1)}| = |5^{-2(2k-1)} - 5^{2k-1}| \\
&= 5^{2k-1} - 5^{-2(2k-1)} \geq 5 - 5^{-2} = \frac{124}{25}
\end{aligned}$$

olur. Buna göre, $\exists\epsilon = \dfrac{124}{25} > 0$ öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k-1$ ve $p = 2k-1$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{2(2k-1)} - x_{2k-1}| \geq \dfrac{124}{25} = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(b) Her $k \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned}
|x_{3k} - x_{2k}| &= |\frac{3k\cos 3k\pi - 1}{6k} - \frac{2k\cos 2k\pi - 1}{4k}| \\
&= |\frac{-3k-1}{6k} - \frac{2k-1}{4k}| = |\frac{-12k+1}{12k}| \\
&= 1 - \frac{1}{12k} \geq \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\epsilon = \dfrac{11}{12} > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k$ ve $p = k$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{3k} - x_{2k}| \geq \dfrac{11}{12} = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $(1 + \dfrac{1}{n})^n > 1$ olduğundan, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{4k} - x_{2k-1} = (1 + \frac{1}{4^k})^{4k} + (1 + \frac{1}{2k-1})^{2k-1} > 1 + 1 = 2$$

olur. Buradan, $\epsilon = 2$ ve her $k \in \mathbb{N})$ için $n = 2k-1$ ve $p = k+1$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{4k} - x_{2k-1}| > 2 = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

Not: $x_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı c) ye benzer şekilde gösterilebilir. •

(d) Her $n, p \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \\
&\geq \frac{p}{\sqrt{n+p}} \Rightarrow x_{2n} - x_n \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\epsilon = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve her $n \in \mathbb{N})$ için $p = n$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{2n} - x_n| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \geq \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(e) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + \ldots + (-1)^{n+p}| \\ &= |(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^p| = \begin{cases} 0, & p \text{ çift ise;} \\ 1, & p \text{ tek ise.} \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Buradan, $\epsilon = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$) için $p = 2n-1$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| = |x_{3n-1} - x_n| = 1 \geq \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir.

(f) Her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{k}{(k+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{(n+2)^2} + \frac{n+2}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{n+p}{(n+p+1)^2} \\ &\geq \frac{p(n+p)}{(n+p+1)^2} \end{aligned}$$

olur. Buradan, $\epsilon = \dfrac{2}{9}$ ve her $n \in \mathbb{N}$) için $p = n$ alırsak $|x_{n+p} - x_n| \geq \dfrac{2n^2}{(2n+1)^2} \geq \dfrac{2n^2}{(3n)^2} = \dfrac{2}{9} = \epsilon$ bulunur. Demek ki, (x_n) bir Cauchy dizisi değildir. $\diamond$

Not: Cauchy yakınsaklık kriteri gereğince Problem 22 de verilen diziler ıraksaktır. $\bullet$

(23) Teorem 2.1.42 yi ispatlayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. Bu durumda, (x_n) dizisinin herhangi (x_{n_k}) alt dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ olduğunu gösterelim.

(a) $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $|x_n - a| < \epsilon$ dir. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow n_\epsilon$ sayısı için $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k > k_\epsilon$ için $n_k > n_\epsilon$ dir. O halde, $\forall k > k_\epsilon$ için $|x_{n_k} - a| < \epsilon$ bulunur. Demek ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ dır.

(b) $a = -\infty$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \forall\epsilon > 0$ için $\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki

$\forall n > n'_\epsilon (n \in \mathbb{N})$ için $x_n < -\epsilon$ dir. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow n'_\epsilon$ sayısı için $\exists k'_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k > k'_\epsilon$ için $n_k > n'_\epsilon$ dir. O halde, $\forall k > k'_\epsilon$ için $x_{n_k} < -\epsilon$ bulunur. Demek ki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = -\infty$ dır.

(c) $a = +\infty$ durumu benzer şekilde ispatlanabilir. $\diamond$

(24) Teorem 2.1.43 ü ispatlayınız.

Çözüm: **(a)** (x_n), $\mathbb{R}$ içinde sınırlı bir dizi ve $\mathcal{R}(x_n)$ ise bu dizinin değer kümesi olsun. $\mathcal{R}(x_n)$ sonlu bir küme ise hiç olmazsa bir x noktası için

$$x = x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_k} = \ldots$$

olacak şekilde $\mathbb{N}$ içinde bir (n_k) dizisi vardır. $x_{n_k} = x$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisidir ve teşkili x limitli yakınsak bir dizi olduğunu gösterir.

$\mathcal{R}(x_n)$ sonsuz bir küme ise, sınırlı olduğundan Bolzano-Weierstrass prensibine göre bu kümenin bir x limit noktası vardır. x, $\mathcal{R}(x_n)$ nin limit noktası olduğundan, $|x_{n_1} - x| < 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. x, $\mathcal{R}(x_n)$ nin limit noktası olduğundan, $|x_{n_2} - x| < 1/2$ olacak şekilde bir $n_2 > n_1$ $(n_2 \in \mathbb{N})$ sayısı vardır. Bu işleme devam edildiğinde k. adımda $|x_{n_k} - x| < 1/k$ olacak şekilde bir $n_k > n_{k-1}$ $(n_k \in \mathbb{N})$ sayısı ve dolayısı ile, (x_n) dizisinin her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_{n_k} - x| < 1/k$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi elde edilir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_{n_k} - x| < 1/k$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x$ dir. Bu ise, x in (x_n) dizisinin bir limit noktası olduğunu gösterir.

(b) (x_n) üstten sınırsız olsun. $\mathcal{R}(x_n)$ kümesi üstten sınırsız olduğundan, (i) durumuna benzer olarak her $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} > k$ olacak şekilde $n_k \in \mathbb{N}$ sayısı elde edilecektir. O halde, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ dir. Bu ise $+\infty$ noktasının (x_n) nin bir limit noktası olduğunu gösterir.

(c) (x_n) alttan sınırsız olduğu durumda $-\infty$ noktasının da (x_n) nin bir limit noktası olduğu benzer şekilde gösterilir. $\diamond$

(25) Teorem 2.1.46 yı ispatlayınız.

Çözüm: $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$ olduğunu gösterelim. ($l = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.)

(x_n) üstten sınırsız bir dizi olsun. O halde, Teorem 2.1.43 gereğince (x_n) nin $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi vardzır. Bu durumda, $+\infty$ noktası (x_n) nin bir limit noktasıdır ve her $x \in \mathbb{R}$ için $x < +\infty$ olduğundan $L = +\infty$ olur. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n = \sup\{x_k : \ k \geq n\} = +\infty$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = +\infty = L$ dir.

(x_n) üstten sınırlı bir dizi olsun. $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri için $A \subset B$ ise, $\sup A \leq \sup B$ olduğunu dikkate alırsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_{n+1} = \sup\{x_k : \ k \geq n+1\} \leq \sup\{x_k : \ k \geq n\} = L_n$$

olduğu bulunur. Demek ki, (L_n) dizisi monoton azalan bir dizidir. Bu durumda, $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \inf \mathcal{R}(L_n)$ (L sonlu veya $L = -\infty$) limiti vardır.

(a) $L = -\infty \Rightarrow \forall\epsilon > 0$ ve $\forall n > n_\epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) için $L_n < -\epsilon$ olacak şekilde bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Her $n > n_\epsilon$ için $L_n = \sup\{x_k : \ k \geq n\} < -\epsilon \Rightarrow \forall n > n_\epsilon$ için $x_n < -\epsilon$ olur. Demek ki, $\forall\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > n_{|\epsilon}$ için $x_n < -\epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dur. Bu durumda, $L = -\infty$ noktası (x_n) nin en küçük limit noktası olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$ dir.
(b) $L \in \mathbb{R}$ olsun. L nin (x_n) dizisinin bir üst limiti olduğunu gösterelim. Bu nedenle supremumun karakteristik özelliklerinden yararlanarak L sayısının aşağıdaki iki karakteristik özelliğini bulalım. $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$ ise, her $\epsilon > 0$ için $L_{n_\epsilon} < L + \epsilon$ olacak şekilde bir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $L + \epsilon > L_{n_\epsilon} = \sup\{x_k : \ k \geq n_\epsilon\}$ ise her $n \geq n'_\epsilon$ için $x_n < L + \epsilon$ dur.
L sayısının I. özelliği: Her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için $x_n < L+\epsilon$ dur. Her $\epsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n \geq L > L-\epsilon$ olduğundan $\exists N > n$ doğal sayısı vardır ki $x_N > L - \epsilon$ olur.
L sayısının II. özelliği: Her $\epsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x'_n > L - \epsilon$ olacak şekilde bir $n' > n$ sayısı vardır.

L sayısının I ve II özelliklerinden yararlanarak L sayısının (x_n) dizisinin bir limit noktası olduğunu gösterelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\epsilon_n > 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ olmak üzere azalan (ϵ_n) dizisini gözönüne alalım. $\epsilon_1 > 0$ sayısı için L nin I özelliğine göre $\exists n_{\epsilon_1} \in \mathbb{N}$ öyleki her $n > n_{\epsilon_1}$ için $x_n < L+\epsilon_1$ ve L nin II özelliğine göre $x_{n_1} > L-\epsilon_1$ olacak şekilde $n_1 > n_{\epsilon_1}$ doğal sayısı vardır. Demek ki, $\epsilon_1 > 0$ sayısı için $L - \epsilon_1 < x_{n_1} < L + \epsilon_1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ doğal sayıları seçilmiş olsun. Şimdi $n_k > n_{k-1}$ doğal sayısının nasıl seçilebileceğini görelim.

L sayısının I özelliğine göre $\exists n_{\epsilon_k} \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_{\epsilon_k}$ için $x_n < L + \epsilon_k$ ve L nin II. özelliğine göre $x_{n_k} > L - \epsilon$ olacak şekilde bir $n_k > \max\{n_{k-1}, n_{k_\epsilon}\}$ sayısı vardır. Demek ki, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$l - \epsilon_k < x_{n_k} < L + \epsilon_k \quad \text{veya} \quad |x_{n_k} - L| < \epsilon_k$$

olacal şekilde $n_k \in \mathbb{N}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$ sayısı vardır. $\lim\limits_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$ olduğundan, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ bulunur. Bu ise L nin (x_n) dizisinin bir limit noktası olduğunu gösterir. Şimdi L nin (x_n) dizisinin limit noktalarının en byüğü olduğunu görelim.

L sayısının I. özelliğine göre her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için $x_n < L+\epsilon$ dir. Buradan, (x_n) dizisinin hiçbir limit noktasının $L+\epsilon$ dan ve dolayısı ile, ϵ nun herhangi bir pozitif sayı olduğu nedeniyle L den büyük olmayacağı görülür.

Böylece, $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$ olduğu ispatlanmış olur. $\diamond$

Not: (x_n) alttan sınırlı bir dizi olduğunda $l = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ sayısının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir.
l sayısının I. özelliği: Her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için $x_n > l - \epsilon$ dur.
l sayısının II. özelliği: Her $\epsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x'_n < l + \epsilon$ olacak şekilde bir $n' > n$ sayısı vardır. $\bullet$

(26) Teorem 2.1.47 yi ispatlayınız.

Çözüm: $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (x_n)$ dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$ dır önermesi doğru olduğundan (Bkz. Teorem 2.1.42) (x_n)

dizisinin limit noktaları kümesi $\mathcal{Z} = \{a\}$ dır. Buradan da $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olduğunu gösterelim.

(a) $a = -\infty$ olsun. Bu durumda, $L = \lim_{n\to\infty} L_n = -\infty$ dir ve Problem 25 ten görüldüğü gibi $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dir. Benzer şekilde, $a = +\infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ olduğu gösterilebilir.

(b) $a \in \mathbb{R}$ olsun. l ve L sayılarının II özelliğine göre her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$ için

$$l - \epsilon < x_n < L + \epsilon \quad \text{veya (} l = L = a \text{ olduğundan)} \quad |x_n - a| < \epsilon$$

olur. Bu da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olması demektir. $\diamond$

(27) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde Cauchy dizisi ve $l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$, $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n$ ve sonuçta $\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (x_n), $\mathbb{R}$ içinde Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır. Bu durumda, (l_n) ve (L_n) sırası ile monoton artan ve monoton azalan diziler olduklarından sonlu $l = \lim_{n\to\infty} l_n$ ve $L = \lim_{n\to\infty} L_n$ limitleri vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $l_n \leq L_n$ olduğundan $l \leq L$ olduğu açıktır. (Bkz. Teorem 2.1.9 (e)). $l = L$ olduğunu gösterelim.

(x_n) bir Cauchy dizisi ise her $\epsilon > 0$ için $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_\epsilon$, $m > n_\epsilon$ için

$$|x_n - x_m| < \epsilon/3$$

dır. Buradan, sabit $m = m_\epsilon = n_\epsilon + 1$ ve her $n > n_\epsilon$ için

$$x_{m_\epsilon} - \epsilon/3 < x_n < x_{m_\epsilon} + \epsilon/3$$

bulunur. O halde, $\forall n > n_\epsilon$ için $x_{m_\epsilon} - \epsilon/3 \leq \inf\{x_k : \ k \geq n\} = l_n \leq L_n = \sup\{x_k : \ k \geq n\} \leq x_{m_\epsilon} + \epsilon/3$ olduğundan, $\forall n > n_\epsilon$ için

$$0 \leq L_n - l_n \leq \frac{2\epsilon}{3}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçersek

$$0 \leq L - l \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

bulunur. Buradan da $l = L$ olduğu görülür. Teorem 2.1.47 gereğince

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

dir. $\diamond$

(28) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin alt ve üst limitlerini bulunuz.

(a) $x_0 = 0, \quad x_n = \sin\frac{n\pi}{6}, n \in \mathbb{N};$

(b) $x_0 = 2, \quad x_n = \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n}, \ n \in \mathbb{N};$

(c) $x_n = \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Çözüm: (a) $x_{12k+3} = 1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{12k+3} = 1$ ve $x_{12k-3} = -1 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{12k-3} = -1$ olduğundan, -1 ve 1 noktaları (x_n) dizisinin birer limit noktalarıdır. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq \sin\frac{n\pi}{6} \leq 1$ olduğundan herhangi $a \in \mathbb{R}, |a| > 1$ sayısı (x_n) dizisinin limit noktası olamaz. Dolayısıyla, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$ dir.

(b) $x_{2k-1} = \dfrac{3^{2k-1} - 3^{2k-1}}{4^{2k-1}} = 0 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 0$, $x_{2k} = \dfrac{3^{2k} + 3^{2k}}{4^{2k}} = 2\big(\dfrac{3}{4}\big)^{2k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = 0$ bulunur. (x_n) dizisinin bütün terimleri (x_{2k-1}) ve (x_{2k}) alt dizilerinin terimleri içinde olduğundan, (x_n) dizisinin limit noktaları kümesi $\mathcal{Z} = \{0\}$ dir. Buradan, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$ bulunur.

Not: $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3^n + (-3)^n}{4^n} = \lim\limits_{k\to\infty} \big(\dfrac{3}{4}\big)^n + \lim\limits_{k\to\infty} \big(-\dfrac{3}{4}\big)^n = 0$ olduğundan, (x_n) yakınsak bir dizidir. Dolayısıyla, (x_n) dizisinin yalnızca bir tane $a = 0$ limit noktası vardır. Buradan da $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğu görülür. $\bullet$

(c) $x_n = (-1)^n\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^n + \sin\frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{N}$ dizisinin bütün terimleri sekiz tane $(x_{8k-j})(k \in \mathbb{N}, j = 0,1,\ldots,7)$ alt dizilerinin terimleri içinde olduğundan, (x_n) dizisinin limit noktaları kümesi $a_j = \lim\limits_{k\to\infty} x_{8k-j},\ j = 0,1,\ldots,7$ olmak üzere $\mathcal{Z} = \{a_0, a_1, \ldots, a_7\}$ dir. $\inf \mathcal{Z} = a_3$ ve $\sup \mathcal{Z} = a_6$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\inf \mathcal{Z} = a_3 = \lim_{k\to\infty} x_{8k-3} &= \lim_{k\to\infty}\left(-\big(1+\frac{1}{8k-3}\big)^{8k-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= -\lim_{k\to\infty}\big(1+\frac{1}{8k-3}\big)^{8k-3} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -e - \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup \mathcal{Z} = a_6 = \lim_{k\to\infty} x_{8k-6} &= \lim_{k\to\infty}\left(\big(1+\frac{1}{8k-6}\big)^{8k-6} + 1\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\big(1+\frac{1}{8k-6}\big)^{8k-6} + 1 = e+1,\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -e - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = e+1$ dir. ⋄

(29) (x_n) ve $y_n = x_n\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (y_n) dizileri verilmiş olsun. (x_n) ve (y_n) dizilerinin aynı limit noktalarıına sahip olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow (n_k)$ $\mathbb{N}$ içinde herhangi bir dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n_k]{n_k} = 1$ dir. (Bkz. Teorem 2.1.42).

$\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı (x_n) dizisinin bir limit noktasıdır ve $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ olsun. O halde, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}.\sqrt[n_k]{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{n_k} = \alpha$ bulunur. Demek ki, α, (y_n) dizisinin bir limit noktasıdır.

Şimdi β, (y_n) dizisinin bir limit noktasıve $\lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k} = \beta$ olsun her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt[n]{n} > 0$ olduğundan, $x_n = y_n/\sqrt[n]{n}$ dizisi tanımlıdır. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{y_{m_k}}{\sqrt[m_k]{m_k}} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k}}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[m_k]{m_k}} = \beta$$

bulunur. Demek ki, $\beta, (x_n)$ dizisinin bir limit noktasıdır. ⋄

(30) Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

(b) $\varliminf\limits_{n\to} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

Çözüm: (a) Alt limitin kendisi bir limit noktası olduğundan, $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{p_k} + y_{p_k})$, $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_{p_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{m_{p_k}}$ dır. Lemma 2.1.49 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n &\le \varliminf_{k\to\infty} x_{p_k} + \varliminf_{k\to\infty} y_{p_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} + \varliminf_{k\to\infty} y_{p_k} \\
&\le \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} + \varliminf_{k\to\infty} y_{m_{p_k}}
\end{aligned}$$

olur. $(x_{m_{p_k}} + y_{m_{p_k}})$ dizisi yakınsak $(x_{p_k} + y_{p_k})$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{p_k} + y_{p_k}) = \lim\limits_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}} + y_{m_{p_k}})$ dir. Ayrıca, $(x_{m_{p_k}})$ yakınsak olduğundan $(y_{m_{p_k}})$ dizisi de yakınsaktır ve $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_{m_{p_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{m_{p_k}}$ olur. Demek ki,

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n &\le \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} + \lim_{k\to\infty} y_{m_{p_k}} \\
&= \lim_{k\to\infty}(x_{m_{p_k}} + y_{m_{p_k}}) = \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n)
\end{aligned}$$

olur. Böylece, (a) nın sol tarafı ispatlanmış olur.
O halde, $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-y_n) = -\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ olduğundan, (Bkz. Lemma 2.1.50)

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \varlimsup_{n\to\infty} y_n &= \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-y_n) \\
&\le \varliminf_{n\to\infty}[(x_n + y_n) + (-y_n)] = \varliminf_{n\to\infty} x_n
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da (a) nın sağ yanının doğruluğu görülür.
(b) Önermesinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

(31) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ olsun. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\underline{\lim}_{n\to} x_n . \underline{\lim}_{n\to} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to} (x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to} x_n \; \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n;$

(b) $\underline{\lim}_{n\to} x_n \; \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

Çözüm: (a) $x_n = 0 (n \in \mathbb{N})$ veya $\underline{\lim}_{n\to} x_n = 0$ ise, (a) eşitsizliği açıktır. $\underline{\lim}_{n\to} x_n > 0$ olsun. Bu durumda, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > n_0 (n \in \mathbb{N})$ için $x_n > 0$ dır. O halde,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{k\to\infty} (x_{p_k} y_{p_k}), \quad \underline{\lim}_{k\to\infty} x_{p_k} = \lim_{k\to\infty} (x_{m_{p_k}})$$

dersek Lemma 2.1.49 gereğince

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} x_{p_k} . \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k} = \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} . \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k}$$

bulunur. $(x_{m_{p_k}} . y_{m_{p_k}})$, yakınsak $(x_{p_k} . y_{p_k})$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{k\to\infty} (x_{p_k} y_{p_k}) = \lim_{k\to\infty} (x_{m_{p_k}} y_{m_{p_k}})$$

olur. Diğer taraftan, $\lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} > 0$, $(x_{m_{p_k}} . y_{m_{p_k}})$ yakınsak bir dizi ve $y_{m_{p_k}} = \big(x_{m_{p_k}} . y_{m_{p_k}}\big) / x_{m_{p_k}}$, $k \in \mathbb{N}$ olduğundan, $(y_{m_{p_k}})$ diziside yakınsaktır. Yani, $\underline{\lim}_{k\to\infty} y_{m_{p_k}} = \lim_{k\to\infty} (y_{m_{p_k}}$ dır. Demek ki,

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n . \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n &\leq \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} \; \underline{\lim}_{k\to\infty} y_{p_k} \\
&= \lim_{k\to\infty} x_{m_{p_k}} . \lim_{k\to\infty} y_{m_{p_k}} \\
&= \lim_{k\to\infty} (x_{m_{p_k}} y_{m_{p_k}}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n)
\end{aligned}$$

dir. Böylece, (a) eşitsizliğinin sol yanı ispatlanmış olur.

Eğer, $\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0$ ise (a) eşitsizliğinin sağ yanı da açıktır. Gerçekten,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$$

bulunur. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n > 0$ olsun. Bu durumda, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n}$ olduğunu (Bkz. Lemma 2.1.51). dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n}.\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n y_n) &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{y_n}.\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n y_n) \\
&\leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \Big[\frac{1}{y_n}.(x_n y_n)\Big] = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Rightarrow \\
\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n y_n) &\leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n
\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki, (a) eşitsizliğinin sağ yanıda sağlanır.
(b) eşitsizliği benzer şekilde gösterilebilir. $\diamond$

(32) $\mathbb{R}$ içindeki yakınsak (x_n) ve herhangi (y_n) dizileri için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \tag{2.4}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Problem (30)'a göre

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) &\geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \\
\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n
\end{aligned}$$

dir. (x_n) yakınsak olduğundan, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ yazılabilir. O halde, son eşitsizliklerden (2.4) 'ün doğruluğu görülür. $\diamond$

(33) Eğer, $x_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ ve $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = 1$ ise, (x_n) dizisi yakınsaktır. Gösteriniz.

Çözüm: Problemin koşulları ve $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n}$ olduğu (Bkz. Lemma 2.1.51) gözönüne alındığında, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ eşitliğinin doğruluğu görülür. O halde, Teorem 2.1.47 gereğince (x_n) yakınsak bir dizidir. $\diamond$

(34) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olmak üzere (x_n) dizisi için aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$;

(b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

Çözüm: (a) Problem (13) te gösterildiği gibi $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ dizisi yakınsak ise, $(\sqrt[n]{x_n})$ dizisi de yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ dir. Alt limitin kendisi bir alt limit olduğundan, $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[p_k]{x_{pk}}$ ve $(m_{p_k}), (p_k)$ nın alt dizisi olmak üzere

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{x_{p_k+1}}{x_{p_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}}$$

dir. Lemma 2.1.49 'a göre

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \varliminf_{k\to\infty} \frac{x_{p_k+1}}{x_{p_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k}+1}}{x_{m_{p_k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[m_{p_k}]{x_{m_{p_k}}}$$

ve $(\sqrt[m_{p_k}]{x_{m_{p_k}}})$, yakınsak $(\sqrt[p_k]{x_{p_k}})$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan,

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &\le \lim_{k\to\infty} \frac{x_{m_{p_k+1}}}{x_{m_{p_k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[m_{p_k}]{x_{m_{p_k}}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt[p_k]{x_{p_k}} = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, (a) önermesinin doğruluğu görülür.
(b) önermesinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir. ◇

(35) $(x_n) = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots)$ dizisi için $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ ve $(\sqrt[n]{x_n})$ dizilerinin alt ve üst limitlerini bulunuz.

Çözüm: Her $k \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{x_{2k}}{x_{2k-1}} = \dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1$ ve $\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}} = \dfrac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \dfrac{k}{k+1}$ olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{2k}}{x_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{2k+1}}{x_{2k}} = 1$$

dir. $(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$ dizisinin bütün terimleri $(\dfrac{x_{2k}}{x_{2k-1}})$ ve $(\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}})$ alt dizilerinin terimleri içinde olduğundan, $a = 1$ noktası $(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$ dizisinin tek bir limit noktasıdır. Demek ki,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

ve Teorem 2.1.47 den $(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$ yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ dir. O halde, $(\sqrt[n]{x_n})$ dizisi de yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ bulunur (Bkz. Problem 13). Teorem 2.1.47 den $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = 1$ olduğu görülür. $\diamond$

(36) $(\cos n)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Olmayana egri yöntemini izleyerek (x_n) dizisinin yakınsak bir dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = a$ olduğunu farzedelim. Bu durumda, $(\cos(n+2))$ dizisi $(\cos n)$ dizisinin bir alt dizisi olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+2) = a$ olduğu ve buradan da

$$\lim_{n\to\infty} \big(\cos(n+2) - \cos n\big) = 0$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
\cos(n+2) - \cos n &= -2\sin(n+1)\sin 1 \Rightarrow \\
\sin(n+1) &= -\frac{1}{2\sin 1}(\cos(n+2) - \cos n) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0 \\
&\Rightarrow \sin n = 0
\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\sin(n+1) &= \sin n \cos 1 + \cos n.\sin 1 \Rightarrow \\
\cos n &= \frac{1}{\sin 1}(\sin(n+1) - \sin n.\cos 1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos n = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\lim_{n\to\infty} \sin n = \lim_{n\to\infty} \cos n = 0$ olduğu elde edilir. Bu da her $n \in \mathbb{N}$ için $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ olması ile çeliştiğinden varsayımın doğru olmadığı görülür. Çünkü, $\lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \sin n = 0$ durumunda $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ eşitliğinde $n \to \infty$ iken limite geçersek, doğru olmayan $1 = \lim_{n\to\infty} \sin^2 n + \lim_{n\to\infty} \cos^2 n = (\lim_{n\to\infty} \sin n)^2 + \lim_{n\to\infty} (\cos n)^2 = 0$ eşitliği elde edilmiş olurdu. $\diamond$

(37) $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi için $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n,\ n, m \in \mathbb{N}$ koşulu sağlandığında (x_n/n) dizisi yakınsaktır. Gösteriniz.

Çözüm: Her $n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq x_n &\leq x_{1+(n-1)} \leq x_1 + x_{n-1} \leq \ldots \\ &\leq x_1 + x_1 + \ldots + x_1 = n x_1 \\ 0 \leq \frac{x_n}{n} &\leq x_1 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan, (x_n/n) dizisinin alttan sınırlı ve sonlu $\alpha = \inf(x_n/n)$ en büyük alt sınıra sahip olduğu görülür. İnfimumun karakteristik özelliğine göre her $\epsilon > 0$ için $\alpha \leq \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

r sayısı $0, 1, \ldots, m-1$ sayılarından biri olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ sayısı $n = mq + r$ şeklinde gösterilebilir. $x_0 = 0$ alarak

$$\begin{aligned} x_n = x_{qm+r} &\leq \underbrace{x_m + x_m + \ldots + x_m}_{q-kez} + x_r = q x_m + x_r, \\ \frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} &\leq \frac{q x_m + x_r}{qm+r} = \frac{x_m}{m} \frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n}, \\ \alpha \leq \frac{x_n}{n} &< (\alpha + \frac{\epsilon}{2}) \frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \frac{\epsilon}{2} + \frac{x_r}{n} \end{aligned}$$

olduğu bulunur. $0 \leq r \leq m-1$ olduğundan, x_r sınırlıdır. Dolayısıyla, her $n > n_\epsilon$ için

$$0 \leq \frac{x_r}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde, her $n > n_\epsilon$ için

$$\alpha \leq \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$$

limiti mevcuttur. $\diamond$

2.3 Ek Problemler

(38) Aşağıda verilen dizilerin sınırlı olduklarını gösteriniz.

(a) $\left(\dfrac{2n^2-1}{2+n^2}\right)$; (b) $\left(\dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}\right)$;

(c) $\left(\dfrac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-2)}\right)$; (d) $\left(\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right)$;

(e) $\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (f) $\left(n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})\right)$;

(g) $\left(\sqrt{\dfrac{n^4+n^3}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right)$; (h) $\left(\sqrt[3]{9n-n^3}+\sqrt[3]{9n+n^3}\right)$;

(i) $\left(\dfrac{2^n+1}{3^n-2}\right)$; (j) $\left(\dfrac{5^{n+1}+2^n}{1-25^n}\right)$;

(k) $\left(\log(3n-5)-\log(n+1)\right)$; (l) $\left(\ln^2(n+1)-\ln^2 n\right)$;

(m) $\left(\dfrac{n}{3^n}\right)$; (n) $\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right)$;

(o) $\left(nq^n\right),\ |q|<1$; (p) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}, n \in \mathbb{N}$;

(q) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}, n \in \mathbb{N}$; (r) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)2k}, n \in \mathbb{N}$;

(s) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}, n \in \mathbb{N}$; (t) $x_2 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4+1}{5x_n},\ n \in \mathbb{N}$;

(u) $x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{b^2}{x_n})$.

(39) Aşağıda verilen dizilerin sınırsız olduklarını gösteriniz.

(a) $((-1)^n n)$; (b) $(\frac{(1-n)}{\sqrt{n}})$;

(c) $(n+(-1)^n n)$; (d) $(\frac{4^n-3^n}{3^n+1})$;

(e) $((1-n)^{\sin(\frac{n\pi}{2})})$; (f) $(n^{\sin(\frac{n\pi}{2})})$;

(g) $(\frac{n^3}{n^2+1})$; (h) $(\sqrt{n^2+(-1)^n.\sqrt{n^3}}-n)$;

(i) (5^n-4^n); (j) $(\frac{2^n}{n^2})$;

(l) $(\frac{a^n}{n^k})$; $|a|>1,\ k\in\mathbb{R}$.

(40) Aşağıda verilen dizilerin minimal terimini bulunuz.

(a) $\big((2n-5)(2n-11)\big)$; (b) $\big(n+\frac{5}{n}\big)$;

(c) $\big(\log_3^2 n-3\log_3 n\big)$; (d) $(\frac{(1,4)^n}{n})$.

Cevap: (a) $x_4=-9$; **(b)** $x_2=4,5$; **(c)** $x_5=\log_3^2 5-3\log_3 5$; **(d)** $x_3=\frac{(1,4)^3}{3}$.

(41) Aşağıda verilen dizilerin maksimal terimini bulunuz.

(a) $(\frac{21}{3n^2-14n-17})$; (b) $(\frac{n}{n^2+9})$;

(c) $(2^{-n}-3.4^{-n})$; (d) $(\frac{n^2}{2^n})$;

(e) $(\frac{n}{n^3+1000})$; (f) $(\frac{(\sqrt{39})^n}{n!})$;

(g) $\big(\sin\frac{n\pi}{2}\big)$; (h) $(\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!})$;

(i) $(\frac{(\sqrt{126})^n}{2n!})$.

Cevap:

(a) $x_6=3$; (b) $x_3=\frac{1}{6}$; (c) $x_3=\frac{5}{64}$;

(d) $x_3=\frac{9}{8}$; (e) $x_8=\frac{1}{189}$; (f) $x_6=\frac{39^3}{6!}$;

(g) $x_{4n+1}=1$; (h) $x_1=\frac{\pi^2}{6}$; (i) $x_5=\frac{126^5}{10!}$.

(42) Aşağıda verilen dizilerin monoton artan olduklarını gösteriniz.

(a) $\big(n^3+2n\big)$; (b) $\big(\frac{3n+4}{n+2}\big)$;

(c) $\big(\sqrt{3n-2}\big)$; (ç) $\big(3^n-2^n\big)$;

(d) $\big(\ln n-\ln(n+1)\big)$; (e) $\left(\frac{n^2}{n^2+10}\right)$;

(f) $\big(3-\arcsin\frac{1}{n^2+4}\big)$; (g) $\big(\log\big(\frac{n^4}{n^4+8}+1\big)\big)$;

(ğ) $\big(2\ln n-\ln(n^2+9n)\big)$; (h) $\big(n-\ln n\big)$;

(ı) $\left((1+\frac{1}{2n})^n\right)$; (i) $x_n=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k.k!$;

(j) $x_1=a>0, y_1=b>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$ olmak üzere (x_n) dizisi;

(k) $0<a<1,\ x_1=\frac{a}{2},\ x_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{x_n^2}{2}$ olmak üzere (x_n) dizisi.

Burada x_n bir dizidir.

(43) Limit tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$; (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$;

(c) $\lim_{n\to\infty}(3+\frac{n}{n+1})=4$; (d) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^2-2n+1}=\frac{1}{3}$;

(e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=0$; (f) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$;

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+9.7^n}{4^n+7^n}=9$; (h) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(44) Aşağıda terimleri verilen dizilerin ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n=\sin(\frac{n\pi}{4}),\ n\in\mathbb{N}$; (b) $x_n=(-1)^n n\ \ n\in\mathbb{N}$;

(c) $x_n=\frac{n}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3},\ n\in\mathbb{N}$; (d) $x_n=n^2\cos\frac{n\pi}{4}$;

(e) $x_n=[\![\frac{(-1)^n}{n}]\!],\ n\in\mathbb{N}$.

(45) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(1)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n+2}$;	(2)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2-n}{n+1} + \dfrac{n2^{-n}}{n+2})$;
(3)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n-1}{n})^6$;	(4)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$;
(5)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2})$;	(6)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$;
(7)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-1} - n - 1)$;	(8)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n)$;
(9)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$;	(10)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2n+3}{n^2})^n$;
(11)	$\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n+10}{2n-1})^n$;	(12)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9+\frac{1}{n}}$;
(13)	$\lim\limits_{n\to\infty} (8 - \dfrac{1}{n^2})^{-\frac{1}{3}}$;	(14)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+0,25}{8n+1}}$;
(15)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{8}$;	(16)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{0,5}$;
(17)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{6}$;	(18)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{10}-2}{1+\sqrt[n]{0,01}}$;
(19)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$;	(20)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{5n+1}{n+5}}$;
(21)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$;	(22)	$\lim\limits_{n\to\infty} 4^{\frac{n+2}{n+1}}$;
(23)	$\lim\limits_{n\to\infty} (1+9^n)^{\frac{1}{n+1}}$;	(24)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$;
(25)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}$;	(26)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n]{n}$;
(27)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2^n}}$;	(28)	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \dfrac{5}{1-\sqrt[n]{32}}\right)$;
(29)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$;	(30)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} (a>0, b>0)$;
(31)	$\lim\limits_{n\to\infty} (1+\dfrac{1}{n^2})^n$;	(32)	$\lim\limits_{n\to\infty} (1-\dfrac{1}{n^2})^n$;
(33)	$\lim\limits_{n\to\infty} (1+\dfrac{1}{n})^{\sqrt{n}}$;	(34)	$\lim\limits_{n\to\infty} n(\dfrac{n+1}{2n-1})^n$;
(35)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3-3n+1}$;	(36)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n.n^2+2n-1}$;
(37)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}$;	(38)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{\dfrac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$;
(39)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n-2}$;	(40)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$;
(41)	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$;	(42)	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$;

(43) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{n^2-1}$;

(44) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2(n+3)}{n-1,3}$;

(45) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\log n}{\log_2(4^n+1)}$;

(46) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+n^2.2^n-1}{n^4+(n!)^2}$;

(47) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^{n^2-1}}{(n^3)!}$;

(48) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$;

(49) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^3}$;

(50) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

(51) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3})$;

(52) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}$;

(53) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n}{2n-1}\dfrac{n}{n^2+n+1}$.

Cevap:

(1) $\frac{1}{3}$; (2) -1; (3) 1; (4) -1; (5) $\frac{-1}{2}$; (6) $\frac{1}{2}$;
(7) -1; (8) $\frac{2}{3}$; (9) 27; (10) 0; (11) 0; (12) 3;
(13) $\frac{1}{2}$; (14) $\frac{1}{2}$; (15) 1; (16) 1; (17) 1; (18) $-\frac{1}{2}$;
(19) 1; (20) 1; (21) $\frac{1}{2}$; (22) 4; (23) 9; (24) 1;
(25) 1; (26) 1; (27) 1; (28) -1; (29) $\frac{3}{4}$; (30) $\max\{a,b\}$;
(31) 1; (32) 1; (33) 1; (34) 0; (35) 1; (36) 2;
(37) 1; (38) 1; (39) 1; (40) 1; (41) $\frac{1}{3}$; (42) $\frac{4}{5}$;
(43) 0; (44) 0; (45) $\frac{1}{2}$; (46) 0; (47) 0; (48) 1;
(49) 0; (50) $\frac{1}{3}$; (51) $\frac{1}{2}$; (52) 0; (53) 0.

(46) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n}} = e$ olduğunu gösteriniz.

(47) $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{4}(n = 3,4,\ldots)$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ i hesaplayınız.

Cevap: $\dfrac{a+2b}{3}$.

(48) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\ldots(1-\dfrac{1}{n^2})$ i hesaplayınız.

Cevap: $\frac{1}{2}$.

(49) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{6})\ldots(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}})$ i hesaplayınız.

Cevap: $\frac{1}{3}$.

(50) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), y_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)}$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) dizileri verilsin.

(a) Her $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için $x_n \leq y_n$;

(b) (x_n) monoton artan;

(c) $(y_n), n \geq 2$ monoton azalan;

(d) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leq |b-a|/4^n$;

(e) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ dir

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

(51) $x_1 = a > 0,\ x_2 = b,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) dizileri verilsin.

(a) (x_n) artan, (y_n) azalan;

(b) (x_n) ve (y_n) dizileri sınırlı;

(c) $|y_{n+1} - x_n| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ dir

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

(52) $x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n},\ (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) ve (y_n) dizileri nin yakınsak olduğunu $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz ve bu limiti bulunuz.

Cevap: $\sqrt{ab}$.

(53) $-\dfrac{1}{4} < b < 0,\ x_1 = a,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{b}{x_n},\ (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve bu limiti bulunuz.

Cevap: $\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$, $a \neq \dfrac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ ve $a \neq 0$ ise; a, $a = \dfrac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ ise.

(54) $\mathbb{R}$ içindeki (x_n) dizisi için $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a,\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$ ve $a \neq b$ dir. (x_n) dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz .

(55) (x_n) dizisi yakınsak ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0,\ (y_n)$ dizisi ise ıraksak ise $(x_n y_n)$ dizisi ıraksaktır. Gösteriniz .

(56) **(a)** $x_{n+1}-x_n \geq -\dfrac{1}{2^n},\ (n \in \mathbb{N})$; **(b)** $x_{n+1}-x_n \geq -\dfrac{1}{n^2},\ (n \in \mathbb{N})$ koşulunu sağlayan üstten sınırlı (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

(57) m bir doğal sayı olmak üzere aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)}{n(n+1)\ldots(n+m)}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)\ldots(k+m+1)}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^m}$.

Cevap: $(a)\quad \dfrac{1}{m+1};\qquad (b)\quad \dfrac{1}{m.m!};\qquad (c)\quad 1$.

(58) Monoton dizilerin limiti üzerine teoremleri kullanarak genel terimleri aşağıda verilen dizilerin yakınsak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2},\ n \in \mathbb{N};$

(b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N};$

(c) $x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N};$

(d) $x_n = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \ldots + \frac{1}{n.2^{n-1}},\ n \in \mathbb{N};$

(e) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n},\ n \in \mathbb{N}.$

(59) $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{k}{n})^n = e^k$ olduğunu gösteriniz.

(60) $\mathbb{N}$ içindeki (k_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} k_n = +\infty$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{k_n})^{k_n} = e$$

olduğunu gösteriniz.

(61) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin sonsuz küçük dizi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^3};$ (b) $x_n = \frac{2n + 3}{n^2};$

(c) $x_n = \frac{q^n}{n},\ |q| \leq 1;$ (d) $x_n = \frac{3n + 1}{(n + 1)3^n};$

(e) $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}};$ (f) $x_n = \frac{n \log n}{n^2 - 1};$

(g) $x_n = \frac{\log_2(n + 3)}{n - 1,3};$ (h) $x_n = \frac{10^n + n!}{2^n + (n + 1)!}$.

(62) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin sonsuz büyük dizi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = (-1)^n n;$ (b) $x_n = (\log_a n)^p,\ a > 1, p \geq 1;$

(c) $x_n = \sqrt[3]{n - 100};$ (d) $x_n = \frac{n\sqrt{n}}{n + 1};$

(e) $x_n = 4\sqrt{n} - n;$ (f) $x_n = 0,5 - (-1)^n \sqrt[3]{n};$

(g) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1};$ (h) $x_n = \frac{2}{1 - \sqrt[n]{n}};$

(i) $x_n = \frac{5^n}{n^2};$ (j) $x_n = \frac{a^n}{n^k},\ |a| > 1, k \in \mathbb{N}.$

(63) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin Cauchy dizisi olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 0,\underbrace{77\ldots 7}_{n-kez};$ (b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)};$

(c) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!};$ (d) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k};$

(e) $x_n = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)};$ (f) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$

(64) Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin Cauchy dizisi olmadıklarını, dolayısıyla ıraksak olduklarını gösteriniz.

(a) $x_n = 0,3^{(-1)^n n};$ (b) $x_n = \frac{n \sin \pi n - 1}{3n};$

(c) $x_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n;$ (d) $x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2};$

(e) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k};$

(f) $x_n = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln^2 n},\ n \geq 2;$

(g) $x_n = \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^2 n},\ n \geq 2.$

(65) Genel terimi $x_n = \frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^p n},\ n \geq 2$ şeklinde verilen (x_n) dizisinin $p > 1$ olduğunda yakınsak, $p \leq 1$ olduğunda ise ıraksak olduğunu gösteriniz.

(66) Aşağıda genel terimi verilen dizilerin $\mathcal{Z}$ limit noktaları kümesini, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ lerini bulunuz.

(a) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}};$ (b) $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2};$

(c) $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4};$ (d) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}};$

(e) $x_n = \cos^n(\frac{2\pi n}{3});$ (f) $x_n = (-1)^n n.$

Cevap:

(a) $\mathcal{Z} = \{-4, 0, 2, 6\},\quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -4,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 6;$

(b) $\mathcal{Z} = \{-\infty, 1, +\infty\},\quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty;$

(c) $\mathcal{Z} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$;
(d) $\mathcal{Z} = \{1, 2\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$;
(e) $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$;
(f) $\mathcal{Z} = \{-\infty, +\infty\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

(67) Aşağıda genel terimi verilen dizilerin alt ve üst limitlerini bulunuz.

(a) $x_n = (\cos \frac{n\pi}{2})^{n+1}$; (b) $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n n}{n}$;

(c) $x_n = n^{\sin(\frac{n\pi}{2})}$; (d) $x_n = \dfrac{1}{n} + \sin \frac{n\pi}{3}$;

(e) $x_n = \dfrac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}$; (f) $x_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}$;

(g) $x_n = n2^{(-1)^n n}$.

Cevap:

(a) $-1, 1$; (b)$-1, 1$; (c) $0, +\infty$; (d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
(e) $0, 2$; (f) $1, 1$; (g) $0, +\infty$.

(68) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $((-1)^n x_n)$ dizisinin yakınsak olması için a ne olmalıdır.

(69) (x_n), $\mathbb{R}$ içinde limiti $a \neq 0$ ve her n için $x_n \geq 0$ koşulunu sağlayan bir dizi ve $r \in \mathbb{Q}$ herhangi bir rasyonel sayı ise, (x_n^r) dizisi yakınsak ve limiti a^r dir. Gösteriniz.

(70) $x_0 > 0$ herhangi bir reel sayı ve

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + \frac{a}{x_n^2}), \quad n = 0, 1, \ldots$$

ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$ olduğunu ispatlayınız.

(71) $\mathbb{R}$ içindeki bir (x_n) dizisi için

$$d_n = \sup\{|x_k - x_m| : k \geq n, m \geq n\}$$

olsun. (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şartın

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

olmasıdır. Gösteriniz.

(72) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_+$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

olduğunu gösteriniz.

(73) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a > 0,\ a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ b \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

olduğunu gösteriniz.

(74) $a > 0, b > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n}{2^n} = \sqrt{ab}$$

olduğunu gösteriniz.

(75) $s_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},\ n \in \mathbb{N}$ olsun.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$ ve (b) $e - s_n \leq \dfrac{n+2}{n!(n+1)^2}$

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.